Sphères cornues

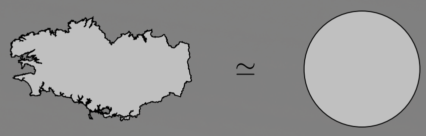
En topologie, le célèbre théorème de Jordan stipule que toute ligne dessinée dans le plan, se refermant et ne se recoupant pas elle-même doit nécessairement découper le plan en deux parties disjointes. Il s'agit d'un résulat tout à fait intuitif, mais pas si facile que ça à démontrer. Exprimons-le pour une courbe dans S^2 :

Théorème (Jordan). Soit C une courbe fermée simple dans S^2. Le complémentaire de cette courbe $S^2 \setminus C$ a exactement deux composantes connexes.

Ce théorème peut sembler un peu faible, nous savons que la ligne sépare S^2 en deux composantes connexes, mais nous n'avons aucune information sur la topologie de ces composantes. En fait, le théorème de Jordan-Schoenflies nous donne un résultat bien plus précis : la ligne en question peut toujours être continûment déformée pour obtenir le cercle standard (l'équateur de la sphère S^2).

Théorème (Jordan-Schoenflies). Soit C une courbe fermée simple dans S^2. Il existe un homéomorphisme de S^2 dans lui-même qui envoie C sur le cercle standard.

Ce second théorème est plus fort que le théorème de Jordan, en particulier il permet de déterminer la topologie du complémentaire de C. En effet, ce complémentaire est envoyé par l'homéomorphisme de S^2 sur le complémentaire du cercle standard. On en déduit que C séparer S^2 en deux composantes homéomorphes à des boules. Ces homéomorphismes sont précisement décrits par l'homéomorphisme présent dans le théorème de Jordan-Shoenflies.



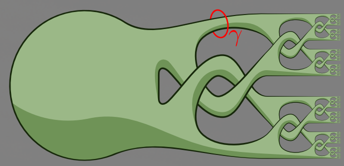
Considérons le même problème en dimension supérieure. Que se passe-t-il pour une partie X de S^3 homéomorphe à une sphère S^2 ?

Le théorème de Jordan se généralise bien : il existe une relation entre les groupes d'homologie de X et les groupes de cohomologie de $S^3 \setminus X$. Cette relation est appelée la dualité d'Alexander et permet de montrer qu'une partie de S^n homéomorphe à S^{n-1} séparer toujours S^n en exactement deux composantes connexes.

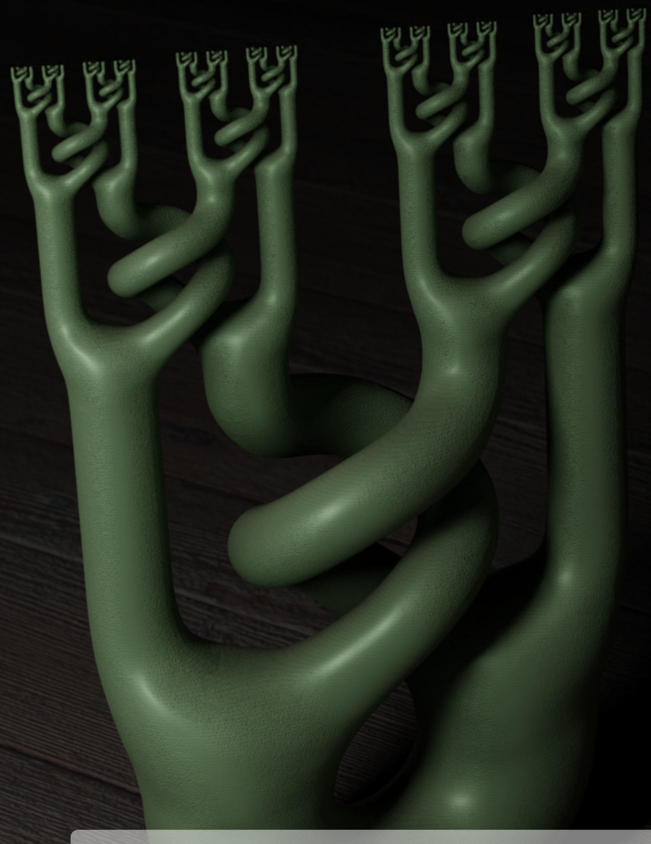
Quant au théorème de Jordan-Schoenflies, la situation devient plus compliquée. Il existe une partie de S^3 homéomorphe à S^2 dont le complémentaire n'est pas simplement connexe. Cette étrange sphère s'appelle la **sphère cornue d'Alexander**. Son complémentaire n'étant pas simplement connexe, il ne peut pas être homéomorphe à l'union disjointe de deux boules. Il n'existe donc pas d'homéomorphisme de S^3 envoyant la sphère cornue d'Alexander sur une sphère standard.

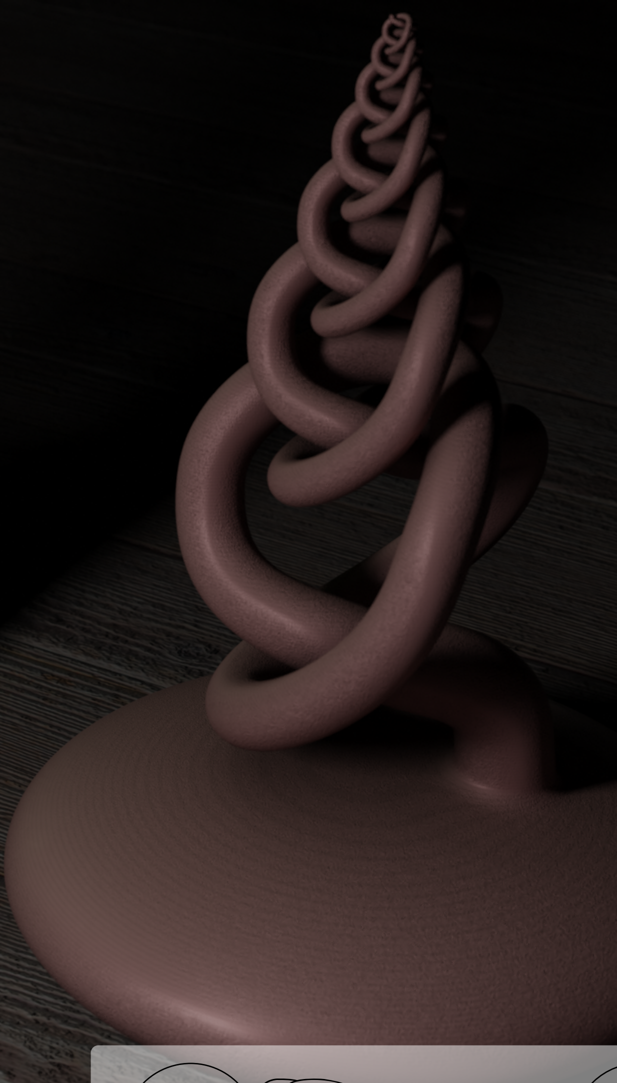
Pour construire cette sphère, nous partons d'une sphère standard sur laquelle nous faisons pousser deux « cornes ». Chacune de ces cornes se divise alors en deux nouvelles cornes, et ainsi de suite une infinité de fois. Les tailles de ces cornes sont choisies de manière à ce que chaque chemin dans cet « arbre de cornes » converge vers un point (distinct pour chacun de ces chemins). Nous ajoutons un ensemble Cantor limite pour refermer la sphère et obtenir une partie compacte.

La partie ainsi obtenue est alors homéomorphe à une sphère, mais les cornes ont également été nouées entre elles à chaque étape, de sorte qu'une boucle choisie autour d'une des premières cornes soit impossible à extraire et à rétracter sans rentrer en contact avec la sphère cornue. Le complémentaire de cette sphère n'est donc pas simplement connexe.



Cet objet, qui a été décrit par J. W. Alexander en 1924, est un exemple ce que l'on appelle un **plongement sauvage**, c'est à dire du plongement continu d'une variété dans une autre tel qu'il n'existe pas d'homéomorphisme de l'espace d'arrivée rendant ce plongement lisse. Le plongement représenté ici est en fait lisse partout, sauf sur l'espace Cantor limite.





Revenons sur le théorème de Jordan-Shoenflies. Nous avons vu qu'une conséquence directe de ce théorème est que le complémentaire d'une courbe fermée simple de S^2 est homéomorphe à l'union disjointe de deux boules. En fait, nous pouvons dire encore un peu plus : l'union d'une des composantes du complémentaires de la courbe C avec cette courbe C est homéomorphe à une boule fermée. Cet homéomorphisme est également donné par l'homéomorphisme décrit par le théorème de Jordan-Shoenflies.

Est-ce vraiment un énoncé différent ? Cette question peut se résumer de la manière suivante.

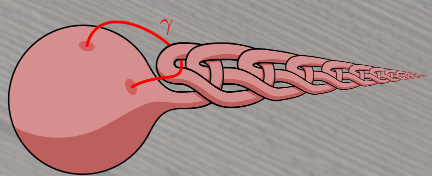
Question. Soit K une partie compacte de R^3. Si
- L'intérieur de K est homéomorphe à une boule ouverte
- La frontière de K est homéomorphe à une sphère S^2

Est-ce que K est homéomorphe à une boule fermée ?

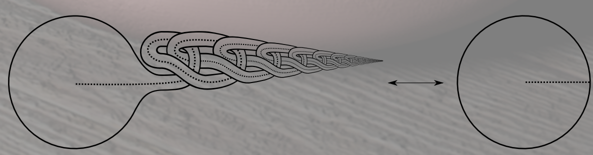
En d'autres termes, si on se donne une partie de S^3 homéomorphe à une sphère et que l'une des composantes de son complémentaire est homéomorphe à une boule ouverte, cet homéomorphisme peut-il être choisi de manière à ce qu'il s'étende à la sphère ?

Même si cela est difficile à imaginer au premier abord, il existe bel et bien des contre-exemples à cette question. L'un de ceux-ci est la **sphère de Fox-Artin**. Il s'agit d'une partie de S^3 homéomorphe à une sphère et dont les deux composantes du complémentaires sont homéomorphes à des boules ouvertes. Cependant, il s'agit tout de même d'un plongement sauvage. En effet, l'union de sa composante extérieure avec cette sphère ne forme pas une partie de S^3 homéomorphe à une boule fermée.

Cette sphère est un peu plus simple à construire que la sphère cornue d'Alexander. Il s'agit d'une sphère standard avec une unique corne réalisant un nombre infini de noeuds et convergeant vers un point. Cette sphère est donc lisse partout, sauf en son point limite.



Le groupe fondamental du complémentaire de l'arc représenté sur ce dessin n'est pas finiment engendré. Un tel comportement est impossible pour un arc lisse défini dans une boule fermée.



L'arc autour duquel est construite la corne de la sphère de Fox-Artin peut être légèrement élargie pour obtenir un partie de S^3 homéomorphe à une boule fermée. De plus, il existe une application de cette boule dans elle-même envoyant cet arc sur un point et étant un homéomorphisme partout hors de cet arc. Cette application peut être transposée dans l'espace de départ, démontrant que le complémentaire de cet arc est bien homéomorphe à une boule ouverte.